Déterminants

Groupe symétrique

Exercice 1 [02231] [correction]
Soit $n \geqslant 2$ et c la permutation circulaire $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.
Déterminer toutes les permutations σ de $\mathcal{S}_n$ qui commutent avec c.

Exercice 2 [02225] [correction]
Dans $\mathcal{S}_n$ avec $n \geqslant 2$, on considère une permutation σ et un p-cycle :

$$c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$$

Observer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un p-cycle qu'on précisera.

Exercice 3 [02224] [correction]
Soient n un entier supérieur à 2, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Montrer que σ et $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ commutent si, et seulement si, $\{i, j\}$ est stable par σ.

Exercice 4 [00121] [correction]
Soit H l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $\sigma(k) + \sigma(n+1-k) = n+1$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$

Exercice 5 [02226] [correction]
Déterminer la signature de :

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 [02227] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la signature de la permutation suivante :
a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$.

Exercice 7 [02228] [correction]
Soit $n \geqslant 2$ et τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$.
a) Montrer que l'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ vers $\mathcal{S}_n$.
b) En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ formé des permutations de signature 1 élément de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 8 [02230] [correction]
Soit $n \geqslant 5$.
Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}$ sont deux cycles d'ordre 3 de $\mathcal{S}_n$, alors il existe une permutation σ, paire, telle que

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Formes multilinéaires alternées

Exercice 9 [01410] [correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{Id} - p$ sa projection complémentaire.
Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E.

Exercice 10 [01413] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., f(x_j), ..., x_n) = \mathrm{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$$

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 11 [01411] [correction]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}$. Montrer que l'espace E est de dimension paire.

Exercice 12 [01412] [correction]
Soit $V = \{x \mapsto \mathrm{e}^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.
a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
b) Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice 13 [03071] [correction]
Soit f un en endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
a) Montrer qu'il existe d'uniques complexes a, b tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\bar{z}$$

b) Exprimer en fonction de a et b le déterminant de f.

Exercice 14 [00752] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par

$$\varphi_A(M) = AM$$

Calculer la trace et le déterminant de φ_A

Exercice 15 [03641] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

a) Montrer que A est inversible.
b) On suppose en outre

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,i} > 0$$

Montrer que $\det A > 0$.

Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 16 [01414] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Former une relation liant $\det(A)$ et $\det \overline{A}$.

Exercice 17 [01415] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 [01416] [correction]
Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n+1$. Montrer que

$$\det A = 0$$

Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Exercice 19 [01417] [correction]
Comparer $\det(a_{i,j})$ et $\det((-1)^{i+j} a_{i,j})$ où $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 20 [03382] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$$

Montrer

$$2^{n-1} \mid \det A$$

Exercice 21 [00738] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.
Calculer le déterminant de la matrice B de colonnes

$$C_1 - C_2, \ldots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$$

Exercice 22 [02355] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 23 [02603] [correction]
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si la matrice A est à coefficients entiers, qu'elle est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.
a) Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors $|\det A| = 1$.
b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}, A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

Calculer $\det A$ et $\det B$.

Exercice 24 [02604] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$) de colonnes $A_1, \ldots, A_n$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $B_1, \ldots, B_n$ déterminées par

$$B_j = \sum_{i \neq j} A_i$$

Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 25 [02695] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

Exercice 26 [00229] [correction]
Soient A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg} H = 1$. Montrer :

$$\det(A + H)\det(A - H) \leqslant \det A^2$$

Exercice 27 [01587] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Etablir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Exercice 28 [03278] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, a_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1$$

Montrer

$$|\det A| \leqslant 1$$

Calculs de déterminants élémentaires

Exercice 29 [01418] [correction]
Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$.

Exercice 30 [01419] [correction]
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a_{\max(i,j)})$.
En déduire en particulier $\det(\max(i,j))$ et $\det(\min(i,j))$.

Exercice 31 [01420] [correction]
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 32 [01421] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ on a
$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

Exercice 33 [01423] [correction]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$
avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
a) Calculer ${}^tA.A$. En déduire $\det A$.
b) Soient $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2$$

Exercice 34 [03377] [correction]
a) Calculer
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$
b) En déduire
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 35 [03366] [correction]
Montrer
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

Calculs de déterminants avancés

Exercice 36 [01425] [correction]
Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. On pose
$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$$
a) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x.
b) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 37 [02693] [correction]
Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$
où $x, a_1, \dots, a_n$ réels.

Exercice 38 [00748] [correction]
Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on considère $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$.
Calculer
$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ [déterminant de Cauchy]}$$
Traiter en particulier le cas où
$$\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = b_i = i \text{ [déterminant de Hilbert]}$$

Exercice 39 [00299] [correction]
On pose
$$P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ (avec } n \geqslant 2)$$
a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

b) Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$$

Exercice 40 [03806] [correction]
[Déterminant de Hurwitz]
Soient $a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$H = \begin{pmatrix} a+\lambda_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & a+\lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 41 [03124] [correction]
Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de coefficient

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 42 [03578] [correction]
Soient un naturel $n \geqslant 2$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n réels distincts de $[0, \pi]$. On pose

$$P_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos x_j - \cos x_i)$$

et on considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos\left((j-1)x_i\right)$$

a) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$ et donner son coefficient dominant.
b) Calculer $\det M_n$ en fonction de P_n.

Exercice 43 [03577] [correction]
Pour une famille de n réels distincts (x_k) de $[0, \pi]$, on pose

$$P_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos x_i - \cos x_j)$$

a) Combien le produit définissant P_n comporte-t-il de facteurs ?
b) Pour $(i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$ écrire la matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos\left((j-1)x_i\right)$$

c) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$.
d) Calculer $\det M$ en fonction de P_4 et montrer $|\det M| < 24$

Calculs de déterminants par une relation de récurrence

Exercice 44 [01426] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 45 [01427] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 46 [01428] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 47 [01429] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite (H_n) avec

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 48 [01430] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 49 [01431] [correction]
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & & \vdots \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \ddots & \vdots \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en notant

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 50 [01432] [correction]
Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en notant par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 51 [03254] [correction]
Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Calculs de déterminants tridiagonaux

Exercice 52 [02584] [correction]
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 53 [01436] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}^\star$ distincts. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 54 [00739] [correction]
Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 55 [00740] [correction]
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 56 [00741] [correction]
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Exercice 57 [01433] [correction]
Pour $a \in \mathbb{K}^\star$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

Applications des déterminants

Exercice 58 [01422] [correction]
[Identité de Lagrange]
Calculer de deux façons :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$$

Exercice 59 [01441] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Pour quelles valeurs de λ, a-t-on $\det(A - \lambda I_3) = 0$?
b) Déterminer une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 60 [01442] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon], A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 61 [01445] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

a) Calculer $\det M$.
b) Déterminer, en fonction de α le rang de M.

Exercice 62 [01446] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

a) Calculer le déterminant de

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

b) En déduire le rang de $M(a,b)$ selon les valeurs des paramètres a et b.

Exercice 63 [03417] [correction]
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé des matrices inversibles d'ordre n à coefficients entiers dont l'inverse est encore à coefficients entiers.
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers ($n \geqslant 2$). Montrer qu'il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si, et seulement si, ces entiers sont premiers dans leur ensemble.

Exercice 64 [00749] [correction]
Etablir que l'inverse de la matrice $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est à coefficients entiers.

Systèmes de Cramer

Exercice 65 [01437] [correction]
Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Résoudre sur $\mathbb{K}$ les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^3x+b^3y+c^3z=d^3 \end{cases}$$

Exercice 66 [01438] [correction]
Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

en fonction de $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exercice 67 [01439] [correction]
Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ \bar{a}x+y+az=0 \\ \bar{a}^2x+\bar{a}y+z=0 \end{cases}$$

Exercice 68 [01440] [correction]
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts.
a) Résoudre

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$

en introduisant : $P = X^3 - (x+yX+zX^2)$
b) Même question pour

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^4 \\ x+by+b^2z=b^4 \\ x+cy+c^2z=c^4 \end{cases}$$

Comatrice

Exercice 69 [01443] [correction]
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
a) Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$.
b) Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si, et seulement si, $\det A = \pm 1$.

Exercice 70 [01444] [correction]
Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) Etablir

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(A)=n & \Rightarrow \mathrm{rg}\,(\mathrm{com}(A))=n \\ \mathrm{rg}(A)=n-1 & \Rightarrow \mathrm{rg}\,(\mathrm{com}(A))=1 \\ \mathrm{rg}(A)\leqslant n-2 & \Rightarrow \mathrm{rg}\,(\mathrm{com}(A))=0 \end{cases}$$

b) Montrer

$$\det(\mathrm{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

c) En déduire

$$\mathrm{com}\,(\mathrm{com}(A))$$

Exercice 71 [03142] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les comatrices de A et B commutent.

Exercice 72 [03260] [correction]
Résoudre l'équation
$$\operatorname{com} M = M$$
d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 73 [03576] [correction]
a) Donner le rang de $B = {}^t(\operatorname{com} A)$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
b) On se place dans le cas où $\operatorname{rg} A = n - 1$.
Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$AC = CA = O_n$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$C = \lambda B$$

Exercice 74 [02659] [correction]
Soient des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux.
Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que
$$UA + VB = I_n$$

Exercice 75 [03944] [correction]
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la comatrice de S est symétrique.

Déterminants de Vandermonde et apparentés

Exercice 76 [00742] [correction]
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer
$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 77 [02384] [correction]
Calculer pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ le déterminant suivant
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 78 [02385] [correction]
Calculer
$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 79 [02386] [correction]
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Calculer :
$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Calculs de déterminants par blocs

Exercice 80 [03129] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Etablir
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

Exercice 81 [03130] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec D inversible. Etablir
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

Exercice 82 [02694] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 83 [02387] [correction]
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
c) Trouver un contre-exemple à b) si A et B ne commutent pas.
d) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Exercice 84 [01424] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$$

b) Justifier

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$$

Exercice 85 [00198] [correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
b) Donner son inverse quand cela est possible.

Exercice 86 [00713] [correction]
On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
On écrit la comatrice de M sous une forme analogue

$$\mathrm{com} M = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
Vérifier

$$\det A' = \det(M)^{p-1} \det D$$

Exercice 87 [03147] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) On suppose C^tD symétrique et D inversible. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(A^tD - B^tC\right)$$

b) On suppose toujours C^tD symétrique mais on ne suppose plus D inversible.
Montrer que l'égalité précédente reste vraie.

Exercice 88 [03288] [correction]
Soient A, B, C, D des matrices carrées d'ordre n, réelles et commutant deux à deux. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $AD - BC$ l'est.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Pour commencer, notons que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ $c^{k-1}(1) = k$ et par conséquent $c^{-(k-1)}(k) = 1$.
Soit σ une permutation commutant avec c_n.
Posons $k = \sigma(1) \in \{1, 2, ..., n\}$ et $s = c^{-(k-1)} \circ \sigma$ de sorte que $s(1) = 1$.
Comme σ et c commutent, s et c commutent aussi et on a pour tout $2 \leqslant i \leqslant n$, $s = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}$ d'où
$s(i) = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}(i) = \sigma^{(i-1)} \circ s(1) = \sigma^{(i-1)}(1) = i$ car $c^{-(i-1)}(i) = 1$.
Par conséquent $s = \mathrm{Id}$ puis $\sigma = c^k$.
Inversement les permutations de la forme c^k avec $1 \leqslant k \leqslant n$ commutent avec c.

Exercice 2 : [énoncé]
Pour $x = \sigma(a_i)$, on a
$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma(a_{i+1})$$
(en posant $a_{p+1} = a_1$).
Pour $x \notin \{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p)\}$, on a
$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$$
car $c(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x)$ puisque $\sigma^{-1}(x) \notin \{a_1, \dots, a_p\}$.
Ainsi
$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \dots & \sigma(a_p) \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : [énoncé]
Si $\{i, j\}$ est stable par σ alors $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$.
On a alors
$$\forall x \notin \{i, j\}, (\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(x) = (\tau \circ \sigma)(x)$$
Pour $x = i$ alors $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(j) = (\tau \circ \sigma)(i)$ et pour $x = j$, $(\sigma \circ \tau)(j) = \sigma(i) = (\tau \circ \sigma)(j)$.
Par suite
$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$
Inversement, si $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ alors $\sigma(i) = (\sigma \circ \tau)(j) = (\tau \circ \sigma)(j) = \tau(\sigma(j))$.
Puisque $\tau(\sigma(j)) \neq \sigma(j)$ on a $\sigma(j) \in \{i, j\}$.
De même $\sigma(i) \in \{i, j\}$ et donc $\{i, j\}$ stable par σ.

Exercice 4 : [énoncé]
$H \subset \mathcal{S}_n$, $\mathrm{Id} \in H$. Remarquons, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(k) = n + 1 - \sigma(n + 1 - k)$.
Soient $\sigma, \sigma' \in H$,
$$(\sigma' \circ \sigma)(k) = \sigma'(\sigma(k)) = n + 1 - \sigma'(n + 1 - \sigma(k)) = n + 1 - \sigma' \circ \sigma(n + 1 - k)$$
donc $\sigma' \circ \sigma \in H$.
Soit $\sigma \in H$. Posons $\ell = \sigma^{-1}(k)$. On a
$$\sigma(n + 1 - \ell) = n + 1 - \sigma(\ell) = n + 1 - k$$
donc $\sigma^{-1}(n + 1 - k) = n + 1 - \ell$ puis
$$\sigma^{-1}(k) + \sigma^{-1}(n + 1 - k) = \ell + (n + 1 - \ell) = n + 1$$

Exercice 5 : [énoncé]
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ :
$$I(\sigma) = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i < j \leqslant n / \sigma(i) > \sigma(j)\}$$
On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.
a) $I(\sigma) = 2 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 17$ donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.
b) $I(\sigma) = 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 2 + 0 + 0 = 6$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Exercice 6 : [énoncé]
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ :
$$I(\sigma) = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i < j \leqslant n / \sigma(i) > \sigma(j)\}$$
On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.
a) $I(\sigma) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
b) $I(\sigma) = 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) + 0 + \dots + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) L'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est involutive, donc bijective.
b) L'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ transforme $\mathcal{A}_n$ en $\mathcal{S}_n \backslash \mathcal{A}_n$ donc $\mathrm{Card}\mathcal{A}_n = \mathrm{Card}\mathcal{S}_n \backslash \mathcal{A}_n$.
Or $\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointe de $\mathcal{A}_n$ et de $\mathcal{S}_n \backslash \mathcal{A}_n$ donc

$$\mathrm{Card}\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}\mathrm{Card}\mathcal{S}_n = \frac{n!}{2}$$

Exercice 8 : [énoncé]
Notons que

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$$

Soit $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ une permutation définie par :

$$\sigma(a) = a', \sigma(b) = b' \text{ et } \sigma(c) = c'$$

Si σ est paire alors le problème est résolu.
Si σ est impaire alors soit $c \neq d \in \mathbb{N}_n \backslash \{a, b, c\}$ et $\tau = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$.
$\sigma \circ \tau$ est une permutation paire satisfaisante.

Exercice 9 : [énoncé]
$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.
$\varphi(y, x) = f(p(y))f(q(x)) - f(p(x))f(q(x)) = -\varphi(x, y)$. Il suffit d'étudier la linéarité en la 1ère variable.
$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = f(p(\lambda x + \mu x'))f(q(y)) - f(p(y))f(q(\lambda x + \mu x'))$ or f, p et q sont linéaires donc
$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = (\lambda f(p(x)) + \mu f(p(x')))\, f(q(y)) - f(p(y))\, (\lambda f(q(x)) + \mu f(q(x')))$
puis en développant et en réorganisant : $\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x', y)$.
φ est donc une forme bilinéaire antisymétrique donc alternée.

Exercice 10 : [énoncé]
L'application $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, f(x_j), \ldots, x_n)$$

est une forme n-linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda.\det_{\mathcal{B}}$.
On a $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$ et par suite

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, f(e_j), \ldots, e_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = \mathrm{tr} f$$

avec $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

Exercice 11 : [énoncé]
Posons $n = \dim E$. Comme $\det(f^2) = \det(-I_n)$ on a $\det(f)^2 = (-1)^n \geqslant 0$, donc n est pair.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$.
$\mathcal{B} = (f_0, \ldots, f_n)$ forme une base de V, donc $\dim V = n + 1$.
b) Pour $f(x) = P(x)\mathrm{e}^x$ on a $D(f)(x) = f'(x) = (P(x) + P'(x))\mathrm{e}^x$.
D est bien une application de V dans V.
De plus la linéarité de D découle de la linéarité de la dérivation et on peut donc conclure $D \in \mathcal{L}(V)$.
Puisque $(x^k \mathrm{e}^x)' = (x^k + kx^{k-1})\mathrm{e}^x$ on a $D(f_k) = f_k + kf_{k-1}$ donc a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite $\det D = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Pour $a, b \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice dans la base $(1, i)$ est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}a + \mathrm{Re}b & \mathrm{Im}b - \mathrm{Im}a \\ \mathrm{Im}a + \mathrm{Im}b & \mathrm{Re}a - \mathrm{Re}b \end{pmatrix}$$

Pour f endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

dans la base $(1, i)$, on a $f = \varphi_{a,b}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \mathrm{Re}a + \mathrm{Re}b = \alpha \\ \mathrm{Im}a + \mathrm{Im}b = \beta \\ \mathrm{Im}b - \mathrm{Im}a = \gamma \\ \mathrm{Re}a - \mathrm{Re}b = \delta \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution qui est

$$a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2} \text{ et } b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}$$

b) Le déterminant de f vaut

$$\det f = \alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2$$

Exercice 14 : [énoncé]
Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On observe

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}$$

Par suite dans la base $(E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$, la matrice de l'endomorphisme φ_A est diagonale par blocs avec n blocs diagonaux tous égaux à A. On en déduit

$$\mathrm{tr}\varphi_A = n\mathrm{tr}A \text{ et } \det \varphi_A = (\det A)^n$$

Exercice 15 : [énoncé]
a) Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et supposons

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$$

Si $m = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \neq 0$ alors, puisque pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \leqslant \frac{\sum_{j\neq i} |\lambda_j| |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \leqslant m \frac{\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de m.
Par suite, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre et donc A inversible.
b) Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n)$.
La fonction f est clairement polynomiale de monôme dominant x^n, elle est donc continue et de limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
De plus, le résultat précédent s'applique à la matrice $A + xI_n$ pour tout $x \geqslant 0$ et donc $f(x) \neq 0$ sur $[0, +\infty[$.
Par continuité, la fonction f ne peut prendre de valeurs $\leqslant 0$ et donc

$$\forall x \geqslant 0, f(x) > 0$$

En particulier $\det A = f(0) > 0$.

Exercice 16 : [énoncé]
Par conjugaison d'une somme et de produits

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

Exercice 17 : [énoncé]
Ici ${}^tA = \bar{A}$, donc $\det(A) = \det({}^tA) = \det \bar{A}$.
Comme

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

on peut conclure $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 : [énoncé]
Comme ${}^tA = -A$ on a

$$\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$

donc $\det A = 0$.
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fournit un contre-exemple au second problème posé.

Exercice 19 : [énoncé]
Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})$. On a

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(i)+i} a_{\sigma(i),i}$$

en regroupant les puissance de (-1)

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)+i} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

puis

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{n(n+1)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Ainsi
$$\det B = (-1)^{n(n+1)} \det A = \det A$$
car $n(n+1)$ est pair.

Exercice 20 : [énoncé]
En ajoutant la première colonne de A à chacune des suivantes, on obtient une matrice dont les colonnes d'indices 2 jusqu'à n ont pour coefficients $0, 2$ ou -2.
On peut donc factoriser 2 sur chacune de ces colonnes et l'on obtient
$$\det A = 2^{n-1} \det B$$
avec B une matrice dont les coefficients sont $0, 1$ ou -1 de sorte que $\det B \in \mathbb{Z}$

Exercice 21 : [énoncé]
La somme des colonnes de B est nulle donc $\det B = 0$.

Exercice 22 : [énoncé]
On a
$$\det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A^2+B^2)$$
car A et B commutent.
Or $\det(A-iB) = \overline{\det(A+iB)}$ donc $\det(A^2+B^2) = z\bar{z} \geqslant 0$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) $AA^{-1} = I_n$ donne $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ or $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ donc $\det A = \pm 1$.
b) Posons $P(x) = \det(A + xB)$. P est une fonction polynomiale de degré inférieur à n.
Pour tout $x \in \{0, 1, \dots, 2n\}$, on a $P(x) = \pm 1$ donc $P(x)^2 - 1 = 0$.
Le polynôme $P^2 - 1$ possède au moins $2n+1$ racines et est de degré inférieur à n, c'est donc le polynôme nul.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \pm 1$.
Pour $x = 0$, on obtient $\det A = \pm 1$.
Pour $x \to +\infty$,
$$\det\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \frac{P(x)}{x^n} \to 0$$
donne $\det B = 0$.

Exercice 24 : [énoncé]
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de l'espace des colonnes,
$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(A_1, \dots, A_n)$$
et
$$\det B = \det_{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n B_i, B_2, \dots, B_n\right)$$
avec
$$\sum_{i=1}^n B_i = (n-1)\sum_{i=1}^n A_i$$
Par suite
$$\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, B_2 - \sum_{i=1}^n A_i, \dots, B_n - \sum_{i=1}^n A_i\right)$$
Ce qui donne
$$\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, -A_2, \dots, -A_n\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1, \dots, A_n)$$
Finalement
$$\det B = (-1)^{n-1}(n-1)\det A$$

Exercice 25 : [énoncé]
Notons que pour $n = 1$: la relation $\det(A+X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X.
On suppose dans la suite $n \geqslant 2$.
Pour $X = A$, la relation $\det(A+X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2\det A$ et donc $\det A = 0$.
La matrice A n'est donc par inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et
$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$
Posons alors $X = QJ'_rP$ avec
$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$
Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A+X$ est inversible et donc $\det X = \det(A+X) \neq 0$.
On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

Exercice 26 : [énoncé]
La matrice H est équivalente à la matrice J_1 dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1,1)$. Notons $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$H = QJ_1P$$

et introduisons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ déterminée par

$$A = QBP$$

La relation
$$\det(A+H)\det(A-H) \leqslant \det A^2$$
équivaut alors à la relation

$$\det(B+J_1)\det(B-J_1) \leqslant \det B^2$$

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de B et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\det(B+J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1+E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1-E_1, C_2, \dots, C_n)$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B+J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B+J_1)\det(B-J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)^2 \leqslant \det B^2$$

Exercice 27 : [énoncé]
En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice $A + xJ$ apparaît comme le déterminant d'une matrice où figure des x seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que $\det(A + xJ)$ est une fonction affine de la variable x.
De plus
$$\det(A - xJ) = \det(-{}^tA - xJ) = (-1)^{2n}\det({}^tA + xJ)$$
et puisque la matrice J est symétrique

$$\det(A - xJ) = \det({}^tA + x\,{}^tJ) = \det(A + xJ)$$

La fonction affine $x \mapsto \det(A - xJ)$ est donc une fonction paire et par conséquent c'est une fonction constante. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det(A + 0.J) = \det A$$

Exercice 28 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vérifiée pour $n \geqslant 1$.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés énoncées. En développant le déterminant de A selon la première ligne, on obtient

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1,j}\Delta_{1,j}$$

avec $\Delta_{1,j}$ mineur d'indice $(1,j)$ de la matrice A.
Puisque la matrice définissant le mineur $\Delta_{1,j}$ est à coefficients positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne est inférieure à 1, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et affirmer $|\Delta_{1,j}| \leqslant 1$.
On en déduit
$$|\det A| \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j} \leqslant 1$$

Récurrence établie.

Exercice 29 : [énoncé]
a) En développant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

b) En sommant les colonnes sur la première et en factorisant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

En retirant la première ligne aux suivante et en développant sur la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-a & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$$

c) En retranchant la première colonne aux suivantes puis en sommant les colonnes sur la première

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c-a & c- \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2- \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3- \end{vmatrix}$$

En factorisant par 2 puis en retranchant la première colonne aux suivantes

$$D = 2\begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

Enfin en factorisant on se ramène à un déterminant de Vandermonde

$$D = 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Finalement

$$D = 2abc(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a)$$

d) En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la dernière)

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

e) En sommant toutes les colonnes sur la première et en factorisant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne aux suivantes et en factorisant

$$D = (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

donc

$$D = (a+b+2c)(a-b)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)((a-c)^2-(b-c)^2)$$

puis

$$D = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)$$

f) En retirant la première colonne aux suivantes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$$

Par la formule de factorisation

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$D = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{b+a}{2} & \sin\frac{c+a}{2} \\ \cos\frac{b+a}{2} & \cos\frac{c+a}{2} \end{vmatrix}$$

puis

$$D = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{b-c}{2}$$

Exercice 30 : [énoncé]

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque colonne la précédente (en commençant par la première)

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & a_n \\ 0 & a_2-a_3 & & a_{n-1}-a_n & a_n \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1}-a_n & a_n \\ (0) & & & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

et donc

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (a_1-a_2)(a_2-a_3)\dots(a_{n-1}-a_n)a_n$$

Pour $a_i = i$,

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (-1)^{n-1}n$$

Pour $a_i = n+1-i$,

$$\det(a_{\min(i,j)}) = 1$$

Exercice 31 : [énoncé]

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & & \star \\ & \ddots & \\ & & a_1 - a_2 & \\ (0) & & & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1-a_2)^{n-1} \text{ via } \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ \vdots \\ C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n \end{matrix}$$

Exercice 32 : [énoncé]
Via $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (dans cet ordre)

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & n \end{vmatrix} = n!$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) ${}^tAA = \operatorname{diag}(\delta,\delta,\delta,\delta)$ avec $\delta = a^2+b^2+c^2+d^2$. Par suite $\det A = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
Or b,c,d fixés, par développement de déterminant, l'expression de $\det A$ est un polynôme en a unitaire de degré 4 donc

$$\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

b) Avec des notations immédiates : $AA' = A''$ avec :

$$\begin{cases} a'' = aa' - bb' - cc' - dd' \\ b'' = ab' + b'a + cd' - dc' \\ c'' = ac' - bd' + ca' + db' \\ d'' = ad' + bc' - cb' + da' \end{cases}$$

Par égalité des déterminants et considération de signes

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)^2 = (a''^2+b''^2+c''^2+d''^2)^2$$

et les quantités suivantes étant positives

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2$$

avec $a'',b'',c'',d'' \in \mathbb{Z}$ par opérations.

Exercice 34 : [énoncé]
a) En factorisant les colonnes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne a fois la précédente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et enfin en développant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

b) En séparant la première colonne en deux

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Puis en procédant à des combinaisons judicieuses sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}$$

Enfin, par permutation des colonnes dans le deuxième déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

Exercice 35 : [énoncé]
En sommant toutes les colonnes sur la première

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin)

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

avec $a = 1-n$ et $b = 1$. La poursuite du calcul donne alors

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}n^{n-2}$$

d'où la formule proposée.

Exercice 36 : [énoncé]

a) En retirant la première colonne aux suivantes

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ b+x & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b+x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Puis en développant selon la première colonne on obtient une expression de la forme.

$$\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$$

b) Par déterminant triangulaire

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a}$$

Exercice 37 : [énoncé]

En retirant la première colonne aux autres, on obtient un déterminant où ne figurent des x que sur la première colonne. En développant selon cette première colonne, on obtient une expression affine de la variable x.

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix} = \alpha x + \beta$$

Il reste à déterminer les réels α, β exprimant cette fonction affine.

D'une part

$$\beta = \begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

et d'autre part

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}'_{x=0}$$

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus lorsqu'on ne dérive qu'une colonne

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & (0) \\ & \vdots & \\ (0) & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

où la colonne formée de 1 est à la position j. Chaque déterminant se calcule en développant selon la ligne ne contenant que le coefficient 1 et l'on obtient

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} a_i$$

Exercice 38 : [énoncé]

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Via $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n)\dots(b_{n-1} - b_n)}{(a_1 + b_n)\dots(a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

Via $L_1 \leftarrow L_1 - L_n, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n)\dots(b_{n-1} - b_n)(a_1 - a_n)\dots(a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n)\dots(a_n + b_n)(a_n + b_1)\dots(a_n + b_{n-1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Par conséquent

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

Puisque

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i) = 1!2!\dots(n-1)!$$

et

$$\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (i + j) = \frac{(n+1)!}{1!} \frac{(n+2)!}{2!} \cdots \frac{(2n)!}{n!}$$

on obtient dans le cas particulier

$$D_n = \frac{(1!2!\dots(n-1)!)^3 n!}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n)!}$$

Exercice 39 : [énoncé]

a) Par l'absurde, supposons que P_n possède une racine multiple z. Celle-ci vérifie

$$P_n(z) = P_n'(z) = 0$$

On en tire

$$z^n - z + 1 = 0 (1) \text{ et } n z^{n-1} = 1 \ (2)$$

(1) et (2) donnent

$$(n-1)z = n \ (3)$$

(2) impose $|z| \leqslant 1$ alors que (3) impose $|z| > 1$. C'est absurde.

b) Posons $\chi(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice étudiée. On vérifie

$$\chi(z_i) = \begin{vmatrix} 1 + z_1 - z_i & & 1 & & (1) \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \\ (1) & & 1 & & 1 + z_n - z_i \end{vmatrix}$$

En retranchant la i-ème colonne à toutes les autres et en développant par rapport à la $i$ème ligne, on obtient

$$\chi(z_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (z_j - z_i) = (-1)^{n-1} P'(z_i)$$

Cependant les polynômes χ et P' ne sont pas de même degré… En revanche, les polynômes χ et $(-1)^n(P - P')$ ont même degré n, même coefficient dominant $(-1)^n$ et prennent les mêmes valeurs en les n points distincts $z_1, \dots, z_n$. On en déduit qu'ils sont égaux. En particulier le déterminant cherché est

$$\chi(0) = (-1)^n \left(P(0) - P'(0)\right) = 2(-1)^n$$

Exercice 40 : [énoncé]

On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a + \lambda_1 \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \lambda_1 E_1 + aC$$

avec E_1 colonne élémentaire et C colonne constituée de 1.

On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$\det H = \det\left(\lambda_1 E_1 + aC, \dots, \lambda_n E_n + aC\right)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne C apparaît deux fois. On obtient

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \dots, aC, \dots, \lambda_n E_n)$$

et donc

$$\det H = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + a \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{k=1, k \neq i}^{n} \lambda_k \right]$$

Exercice 41 : [énoncé]

Notons D_n le déterminant recherché.

On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1 E_1 + b_1 C$$

avec E_1 colonne élémentaire et C colonne constituée de 1.

On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$D_n = \det(a_1 E_1 + b_1 C, \dots, a_n E_n + b_n C)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne C apparaît deux fois. On obtient

$$D_n = \det(a_1 E_1 + \cdots + a_n E_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(a_1 E_1, \dots, b_i C, \dots, a_n E_n)$$

et donc

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \left[b_i \prod_{k=1, k \neq i}^{n} a_k \right]$$

Exercice 42 : [énoncé]

a) $\cos(0.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 0.

$\cos(1.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 1.

Par récurrence double, on montre que $\cos(jx_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré j en exploitant la relation :

$$\cos((j+1)x_i) + \cos((j-1)x_i) = 2\cos(x_i)\cos(jx_i)$$

On peut aussi par récurrence affirmer que le coefficient dominant de $\cos(jx_i)$ est 2^{j-1} pour $j \geqslant 1$.

On peut même être plus précis et affirmer que $\cos((j-1)x_i)$ est une expression polynomiale de degré $j-1$ en $\cos(x_i)$.

d) $\det M_n$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus $n-1$.

Puisque $\cos(x_2), \dots, \cos(x_n)$ sont $n-1$ racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M_n = \lambda(x_2, \dots, x_n) \prod_{j=2}^{n} (\cos x_j - \cos x_1)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2, \dots, x_n)$ est polynomiale en $\cos(x_2)$ de degré au plus $n-2$ (car il y a déjà le facteur $\cos(x_2) - \cos(x_1)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3), \dots, \cos(x_n)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = \mu(x_3, \dots, x_n) \prod_{j=3}^{n} (\cos x_j - \cos x_2)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M_n = \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos x_j - \cos x_i) = \alpha_n P$$

Il reste à déterminer la valeur de α_n...

Un calcul immédiat donne $\alpha_2 = 1$.

En développant selon la dernière ligne

$$\det M_n = \cos((n-1)x_n) \det M_{n-1} + \cdots$$

où les points de suspensions contiennent une expression polynomiale en $\cos(x_n)$ de degré $< n-1$.

En identifiant les coefficients dominant des expressions polynomiale en $\cos(x_n)$ dans cette égalité, on obtient

$$\alpha_n = 2^{n-2} \alpha_{n-1}$$

Cette relation permet de conclure

$$\alpha_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

Exercice 43 : [énoncé]

a) Il y autant de facteurs que de paires $\{i, j\}$ i.e.

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

b)

$$M=\begin{pmatrix}1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) & \cos(3x_1)\\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) & \cos(3x_2)\\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) & \cos(3x_3)\\ 1 & \cos x_4 & \cos(2x_4) & \cos(3x_4)\end{pmatrix}$$

c) La propriété est immédiate pour $j=1$ ou $j=2$.
Pour $j=3$, $\cos(2x_i)=2\cos^2 x_i-1$.
Pour $j=4$, $\cos(3x_i)=4\cos^3 x_i-3\cos x_i$.
d) $\det M$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus 3.
Puisque $\cos(x_2),\cos(x_3),\cos(x_4)$ sont 3 racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M=\lambda(x_2,x_3,x_4)\prod_{j=2}^{4}(\cos x_1-\cos x_j)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2,x_3,x_4)$ est polynomiale $\cos(x_2)$ de degré au plus 2 (car il y a déjà le facteur $\cos(x_1)-\cos(x_2)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3),\cos(x_4)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2,\dots,x_n)=\mu(x_3,x_4)\prod_{j=3}^{4}(\cos x_2-\cos x_j)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M=\alpha\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(\cos x_i-\cos x_j)=\alpha P_4$$

Il reste à déterminer la valeur de α...
Une démarche analogue à la précédente aurait donnée

$$\begin{vmatrix}1 & \cos x_1 & \cos(2x_1)\\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2)\\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3)\end{vmatrix}=\beta P_3$$

et

$$\begin{vmatrix}1 & \cos x_1\\ 1 & \cos x_2\end{vmatrix}=\gamma P_2 \text{ avec } \gamma=-1$$

En développant $\det M$ selon la dernière ligne et en considérant le coefficient dominant de $\det M$ vu comme polynôme en $\cos(x_3)$ on obtient

$$4\beta P_3=(-1)^3\alpha P_3$$

et de façon analogue on a aussi

$$2\gamma P_2=(-1)^2\beta P_2$$

On en déduit

$$\alpha=8$$

Puisque $\operatorname{Card}\mathfrak{S}_4=24$, $\det M$ peut se voir comme la somme de 24 termes qui sont tous inférieurs à 1 en valeur absolue. On en déduit

$$|\det M|\leqslant 24$$

Certains des termes (par exemple $1\times\cos(x_1)\times\cos(2x_2)\times\cos(3x_3)$) étant strictement inférieurs à 1 en valeur absolue, on a aussi

$$|\det M|<24$$

Exercice 44 : [énoncé]
Par les opérations élémentaires $C_1\leftarrow C_1+C_n$ puis $L_1\leftarrow L_1+L_n$ on obtient

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0\end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n=D_{n-2}$$

Comme $D_1=0$ et $D_2=1$, on a

$$D_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$$

Exercice 45 : [énoncé]
Par les opérations élémentaires : $C_1\leftarrow C_1-C_n$ puis $L_1\leftarrow L_1-L_n$ on obtient

$$D_n=\begin{vmatrix}-2 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & & & (1)\\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & (1) & & & 0\end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1.
Sachant $D_1 = 0$ et $D_2 = -1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 46 : [énoncé]
En développant selon la deuxième ligne

$$D_n = -\begin{vmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + D_{n-1} = -1 + D_{n-1}$$

Puisque $D_1 = 1$ on obtient

$$D_n = 2 - n$$

Exercice 47 : [énoncé]
En décomposant la dernière colonne en somme de deux colonnes

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

En retranchant la dernière colonne à chacune des autres

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & (0) & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & n-1 & 1 \\ (0) & & & 1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

En développant selon la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]} = nD_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$$

Par suite

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!}$$

donc

$$\frac{D_n}{n!} = D_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

puis

$$D_n = (1 + H_n)n!$$

Exercice 48 : [énoncé]
En décomposant la première ligne en somme de deux lignes

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a & a & & a+b \end{vmatrix}_{[n]} + \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ a & a+b & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a & a & & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

En retranchant la première colonne à toutes les autres dans le second déterminant, on obtient

$$D_n = aD_{n-1} + b^n$$

Par récurrence, on en déduit

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \text{ si } a \neq b$$

et

$$D_n = (n+1)a^n \text{ si } a = b$$

Exercice 49 : [énoncé]
En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_1^0 & C_1^1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-2}^{n-2} \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne, on obtient

$$D_n = D_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = D_1 = 1$$

Exercice 50 : [énoncé]
En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière) on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et en exploitant $C_p^0 = C_{p+1}^0$, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = D_n$$

Finalement

$$D_n = 1$$

Exercice 51 : [énoncé]
Cas $b = c$:
C'est un calcul classique, on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ ($i = 2, \ldots, n$) pour triangulariser le déterminant et obtenir

$$\det A_n = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Cas $b \neq c$:
Posons $D_n = \det A_n$. A chaque ligne on retranche la précédente

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c-a & a-b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & c-a & a-b \end{vmatrix}$$

et on développe selon la dernière colonne

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \text{ (avec } n \geqslant 2)$$

Ainsi

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + b(a-b)(a-c)^{n-2} + \cdots + b(a-b)^{n-2}(a-c)^1 + (a-b)^{n-1}D_1$$

Par sommation géométrique des premiers termes

$$D_n = b(a-c)^{n-1}\frac{1 - \left(\frac{a-b}{a-c}\right)^{n-1}}{1 - \frac{a-b}{a-c}} + a(a-b)^{n-1}$$

puis après simplification

$$D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$$

Exercice 52 : [énoncé]
Par développement d'un déterminant tridiagonal,

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (a+b)r + ab = 0$ de racines a et b.
Si $a \neq b$ alors on peut écrire $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ et compte tenu des valeurs initiales, on obtient

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Si $a = b$ alors on peut écrire $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ et on parvient cette fois-ci à

$$D_n = (n+1)a^n$$

Exercice 53 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$r^2 - (a+b)r + ab = 0$ de racines distinctes a et b.
On a $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. $D_0 = 1$ et $D_1 = a+b$ donnent

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Exercice 54 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$r^2 - (1+x^2)r - x^2 = 0$ de racines 1 et x^2.
Si $x^2 \neq 1$ alors $D_n = \lambda + \mu x^{2n}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$D_0 = 1$ et $D_1 = 1 + x^2$ donnent

$$D_n = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

Si $x^2 = 1$ alors $D_n = \lambda n + \mu$.
$D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n + 1$$

Exercice 55 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$ de racines $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
Si $\theta \neq 0 \quad [\pi]$ alors $D_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2\cos\theta$ donnent

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta = 2\cos\theta \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1/\tan\theta \end{cases}$$

Ainsi

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Si $\theta = 0 \quad [2\pi]$ alors $D_n = \lambda n + \mu$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n + 1$$

Si $\theta = \pi \quad [2\pi]$ alors $D_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = (-1)^n (n+1)$$

Exercice 56 : [énoncé]
En développant selon la première colonne, puis la première ligne et en recommençant : $D_n = (-n) \times 1 \times (2-n) \times 3$ etc...
Si n est pair le développement s'arrête sur le calcul de

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si n est impair le développement s'arrête par l'étape

$$\begin{vmatrix} 0 & n-2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3(n-2) \begin{vmatrix} 0 & n \\ 1 & n \end{vmatrix} = 3n(n-2)$$

En écrivant $n = 2p+1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{p+1} (1 \times 3 \times \cdots \times 2p+1)^2$$

Exercice 57 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$r^2 - 2ar + a^2 = 0$ de racines double a.
On a alors $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$ donnent

$$D_n = (n+1)a^n$$

Exercice 58 : [énoncé]
D'une part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{vmatrix} = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

Exercice 59 : [énoncé]
a) Après calculs

$$\det(A-\lambda I_3) = (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

On a donc

$$\det(A-\lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, 2 \text{ ou } 4$$

b) Après résolution de l'équation $f(x) = \lambda x$ pour $\lambda = 1, 2$ ou 4, on obtient

$$\varepsilon_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3, \varepsilon_2 = e_1 - e_2 + e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

convenables.

Exercice 60 : [énoncé]
Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On sait

$$\det(A+xB) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + xb_{\sigma(i),i})$$

La fonction $x \mapsto \det(A+xB)$ est continue (car polynomiale) et ne s'annule pas en 0 (car $\det(A) \neq 0$), donc elle ne s'annule pas sur un voisinage de 0 ce qui résout le problème posé.

Exercice 61 : [énoncé]
a) En écrivant la première colonne comme somme de deux colonnes on obtient

$$\det M = 1 - (-1)^n \alpha^n$$

b) Si $\det M \neq 0$ alors M est inversible et $\mathrm{rg} M = n$.
Si $\det M = 0$ alors M n'est pas inversible donc $\mathrm{rg} M < n$.
Or M possède une matrice extraite de rang $n-1$ donc $\mathrm{rg} M = n-1$.
Finalement

$$\mathrm{rg} M = \begin{cases} n-1 & \text{si } -\alpha \in U_n \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 62 : [énoncé]
a) En sommant toutes les colonnes sur la première colonne

$$\det M(a,b) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}$$

puis en retirant la première ligne au suivante

$$\det M(a,b) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(b-a)^{n-1}$$

b) Si $a = b = 0$ alors

$$\mathrm{rg} M(a,b) = 0$$

Si $a = b \neq 0$ alors

$$\mathrm{rg}(M(a,b)) = 1$$

Si $a \neq b$ et $a+(n-1)b \neq 0$ alors

$$\mathrm{rg} M(a,b) = n$$

Si $a \neq b$ et $a+(n-1)b = 0$ alors

$$\mathrm{rg} M(a,b) = n-1$$

car $M(a,b)$ possède une matrice de rang $n-1$ inversible puisque $a \neq b$ et $a+(n-2)b \neq 0$.

Exercice 63 : [énoncé]
Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Le déterminant de A ainsi que celui de son inverse sont des entiers. Puisque

$$\det A \times \det A^{-1} = 1$$

on en déduit $\det A = \pm 1$. Inversement, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est de déterminant ± 1 alors son inverse, qui s'exprime à l'aide de la comatrice de A, est à coefficients entiers. Ainsi les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices à coefficients entiers de déterminant ± 1.

Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée par les entiers $a_1,\dots,a_n$. En développant le calcul de $\det A$ selon la première ligne de la matrice, on obtient une relation de la forme

$$a_1u_1+\dots+a_nu_n=1$$

avec les u_k égaux, au signe près, à des mineurs de la matrice A. Ces u_k sont donc des entiers et la relation qui précède assure que les entiers $a_1,\dots,a_n$ sont premiers dans leur ensemble.
Pour établir la réciproque, raisonnons par récurrence sur $n\geqslant 2$ pour établir qu'il existe une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1, dont la première ligne est $a_1,\dots,a_n$ premiers dans leur ensemble.
Pour $n=2$. Soient a,b deux entiers premiers entre eux. Par l'égalité de Bézout, on peut écrire

$$au+bv=1 \text{ avec } u,v\in\mathbb{Z}$$

Considérons alors la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ -v & u\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

Celle-ci étant de déterminant 1, elle appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 2$.
Soient $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}$ des entiers premiers dans leur ensemble. Posons

$$d=\mathrm{pgcd}(a_1,\dots,a_n)$$

Les entiers d et a_{n+1} étant premiers entre eux, il existe $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que

$$du+a_{n+1}v=1$$

De plus, on peut écrire

$$a_1=da_1',\dots,a_n=da_n'$$

avec $a_1',\dots,a_n'$ premiers dans leur ensemble.
Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a_1' & a_2' & \cdots & a_n'\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

de déterminant 1.

Considérons alors la matrice

$$\begin{pmatrix} da_1' & da_2' & \cdots & da_n' & a_{n+1}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} & 0\\ -va_1' & -va_2' & \cdots & -va_n' & u\end{pmatrix}$$

Celle-ci est à coefficients entiers et en développant son déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient 1.
Récurrence établie.

Exercice 64 : [énoncé]
On a $H^{-1}=\frac{1}{\det H}{}^t\mathrm{com}H$ avec $\mathrm{com}H=(H_{i,j})$.
Par opérations élémentaires,

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$$

En simplifiant les facteurs communs, on obtient

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H}=\frac{(-1)^{k+\ell}(n+k-1)!(n+\ell-1)!}{(k+\ell-1)(k-1)!^2(\ell-1)!^2(n-k)!(n-\ell)!}$$

puis

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H}=(-1)^{k+\ell}(k+\ell-1)\binom{n+k-1}{k+\ell-1}\binom{n+\ell-1}{k+\ell-1}\binom{k+\ell-2}{k-1}\in\mathbb{Z}$$

Exercice 65 : [énoncé]
a) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$\begin{cases} x=\dfrac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)}\\ y=\dfrac{(d-a)(c-a)(c-d)}{(b-a)(c-a)(c-b)}\\ z=\dfrac{(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)}\end{cases}$$

b) On a
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \neq 0$$
Par les formules de Cramer
$$x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)(d+b+c)}{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$$
et y, z par symétrie.

Exercice 66 : [énoncé]
Le système est de Cramer via déterminant de Vandermonde.
$(1)+(2)+(3)$ donne
$$x = \frac{a+b+c}{3}$$
$(1)+j^2(2)+j(3)$ donne
$$y = \frac{a+bj^2+cj}{3}$$
et $(1)+j(2)+j^2(3)$ donne
$$z = \frac{a+bj+cj^2}{3}$$

Exercice 67 : [énoncé]
Le déterminant du système est
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \bar{a} & 1 & a \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & \bar{a}(1-|a|^2) & 1-|a|^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & 0 & 1-|a|^2 \end{vmatrix}$$
Si $|a| \neq 1$ alors est le système est de Cramer et homogène
$$\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$$
Si $|a| = 1$ alors le système équivaut à une seule équation
$$x + ay + a^2 z = 0$$
car les deux autres lui sont proportionnelles. On en déduit
$$\mathcal{S} = \left\{(-ay - a^2 z, y, z)/y, z \in \mathbb{C}\right\}$$

Exercice 68 : [énoncé]
Les deux systèmes proposés sont de Cramer via déterminant de Vandermonde.
a) Si x, y, z est sa solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc
$$P = (X-a)(X-b)(X-c)$$
On en déduit
$$x = abc,\ y = -(ab+bc+ca) \text{ et } z = a+b+c$$
b) Introduisons
$$P = X^4 - (x + yX + zX^2)$$
Si x, y, z est solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc
$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$$
Puisque le coefficient de X^3 dans P est nul, la somme des racines de P est nulle et donc
$$a+b+c+d = 0$$
puis
$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X+(a+b+c))$$
En développant, on obtient
$$x = \sigma_3\sigma_1,\ y = \sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 \text{ et } z = \sigma_1^2 - \sigma_2$$
avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les expressions symétriques élémentaires en a, b, c.

Exercice 69 : [énoncé]
a) Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a
$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$
Par suite si tous les $a_{i,j}$ sont entiers, $\det A$ l'est aussi.
b) $(\Rightarrow)$ Si A et A^{-1} sont à coefficients entiers alors $\det A \in \mathbb{Z}$ et $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$.
Or $\det A . \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$
Donc $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$.
$(\Leftarrow)$ Si $\det A = \pm 1$ alors A est inversible car de déterminant non nul
Son inverse est
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\text{com} A = \pm{}^t\text{com} A$$
Or la comatrice de A est formée des cofacteurs de A qui sont des entiers car égaux à des déterminants de matrices à coefficients entiers (car extraites de A).
Ainsi A^{-1} est une matrice à coefficients entiers

Exercice 70 : [énoncé]
a) Si $\text{rg}(A) = n$ alors A est inversible et sa comatrice l'est alors aussi donc

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = n$$

Si $\text{rg}(A) \leqslant n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Par suite $\text{com}(A) = O_n$ et donc

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = 0$$

Si $\text{rg}(A) = n-1$, exploitons la relation $A^t\text{com}(A) = \det(A).I_n = O_n$.
Soient f et g les endomorphismes de K^n canoniquement associés aux matrices A et ${}^t\text{com}(A)$.
On a $f \circ g = 0$ donc $\text{Im}g \subset \ker f$. Comme $\text{rg}(f) = n-1$, $\dim \ker f = 1$ et par suite $\text{rg}(g) \leqslant 1$.
Ainsi $\text{rg}(\text{com}(A)) \leqslant 1$.
Comme $\text{rg}(A) = n-1$, il existe un déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et par suite $\text{com}(A) \neq O_n$.
Finalement

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$$

b) Comme $A^t\text{com}(A) = \det(A).I_n$ on a

$$\det(A)\det\text{com}(A) = (\det A)^n$$

Si $\det A \neq 0$ alors

$$\det\text{com}(A) = (\det A)^{n-1}$$

Si $\det A = 0$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) \leqslant 1 < n$ donc

$$\det(\text{com}(A)) = 0$$

c) Si $\text{rg}(A) = n$ alors

$${}^t\text{com}(\text{com}(A)).\text{com}(A) = \det(\text{com}(A)).I_n = \det(A)^{n-1}.I_n$$

Donc

$${}^t\text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-1}\text{com}(A)^{-1}$$

Or ${}^t\text{com}(A).A = \det(A).I_n$ donc

$${}^t\text{com}(A) = \det(A).A^{-1}$$

puis sachant ${}^t(B)^{-1} = ({}^tB)^{-1}$ on a :

$$\text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-2}A$$

Si $\text{rg}(A) \leqslant n-1$ et $n \geqslant 3$ alors $\text{rg}(\text{com}A) \leqslant 1 \leqslant n-2$ donc

$$\text{com}(\text{com}(A)) = O_n$$

Si $n = 2$ alors pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \text{com}(\text{com}(A)) = A$$

Exercice 71 : [énoncé]
Cas A et B inversibles
Puisque A et B commutent, leurs inverses commutent aussi
On en déduit

$$\frac{1}{\det A}{}^t(\text{com}A)\frac{1}{\det B}{}^t(\text{com}B) = \frac{1}{\det B}{}^t(\text{com}B)\frac{1}{\det A}{}^t(\text{com}A)$$

En simplifiant et en transposant on obtient

$$\text{com}(A)\text{com}(B) = \text{com}(B)\text{com}(A)$$

Cas général
Pour p assez grand, les matrices

$$A + \frac{1}{p}I_n \text{ et } B + \frac{1}{p}I_n$$

sont inversibles et commutent donc

$$\text{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)\text{com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right) = \text{com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right)\text{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient

$$\text{com}(A)\text{com}(B) = \text{com}(B)\text{com}(A)$$

Exercice 72 : [énoncé]
Soit M solution de l'équation étudiée.
Puisque

$${}^t(\text{com}M)M = \det(M)I_n$$

on obtient

$${}^tMM = \det(M)I_n$$

et donc

$$\mathrm{tr}({}^tMM) = n\det M$$

Or

$$\mathrm{tr}({}^tMM) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^2$$

donc $\det M \geqslant 0$.
De plus, en passant la relation ${}^tMM = \det(M)I_n$ au déterminant, on obtient

$$(\det M)^2 = (\det M)^n$$

Cas $n \neq 2$
On obtient $\det M = 0$ ou 1.
Dans le cas $\det M = 0$, on obtient $\mathrm{tr}({}^tMM) = 0$ et donc $M = O_n$.
Dans le cas $\det M = 1$, on obtient ${}^tMM = I_n$ et donc M est une matrice orthogonale de déterminant 1.
Inversement, la matrice nulle et solution de l'équation étudiée et si M est une matrice orthogonale de déterminant 1 alors

$${}^t(\mathrm{com}M)M = I_n = {}^tMM$$

ce qui donne $\mathrm{com}M = M$ sachant M inversible.
Cas $n = 2$
Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{com}M = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{com}M = M$ si, et seulement si, M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 73 : [énoncé]
a) On sait $AB = BA = \det(A)I_n$.
Si $\mathrm{rg}A = n$ alors A est inversible donc B aussi et $\mathrm{rg}B = n$.
Si $\mathrm{rg}A = n-1$ alors $\dim\ker A = 1$ et puisque $AB = O_n$, $\mathrm{Im}B \subset \ker A$ puis $\mathrm{rg}B \leqslant 1$.
De plus, la matrice A étant de rang exactement $n-1$, elle possède un mineur non nul et donc $B \neq O_n$. Finalement $\mathrm{rg}B = 1$.
Si $\mathrm{rg}A \leqslant n-2$ alors tous les mineurs de A sont nuls et donc $B = O_n$ puis $\mathrm{rg}B = 0$.
b) Puisque $\mathrm{rg}A = n-1$, $\dim\ker A = 1$ et $\dim\ker {}^tA = 1$.
Il existe donc deux colonnes X et Y non nulles telles que

$$\ker A = \mathrm{Vect}X \text{ et } \ker {}^tA = \mathrm{Vect}Y$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AM = MA = O_n$.
Puisque $AM = O_n$, $\mathrm{Im}M \subset \ker A = \mathrm{Vect}X$ et donc on peut écrire par blocs

$$M = (\lambda_1 X \mid \ldots \mid \lambda_n X) = XL$$

avec $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
La relation $MA = O_n$ donne alors $XLA = O_n$ et puisque $X \neq 0$, on obtient $LA = 0$ puis ${}^tA{}^tL = 0$. Ceci permet alors d'écrire L sous la forme $L = \lambda{}^tY$ puis M sous la forme

$$M = \lambda X{}^tY$$

Inversement une telle matrice vérifie $AM = MA = O_n$ et donc

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/AM = MA = O_n\} = \mathrm{Vect}(X{}^tY)$$

Cet espace de solution étant une droite et la matrice B étant un élément non nul de celle-ci, il est dès lors immédiat d'affirmer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AC = CA = O_n$ est nécessairement colinéaire à B.

Exercice 74 : [énoncé]
Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u\det A + v\det B = 1$. $U = u^t\,(\mathrm{com}A)$ et $V = v^t\,(\mathrm{com}B)$ conviennent alors.

Exercice 75 : [énoncé]
Le coefficient d'indice (i,j) de la comatrice de S est

$$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

avec $\Delta_{i,j}$ le mineur d'indice (i,j) de la matrice S i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de S. Or le déterminant d'une matrice est aussi celui de sa transposée et puisque la matrice S est symétrique, le mineur d'indice (i,j) est égal à celui d'indice (j,i). On en déduit que la comatrice de S est symétrique.

Exercice 76 : [énoncé]
On réalise les opérations élémentaires $C_n \leftarrow C_n - x_1C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1C_{n-2}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - x_1C_1$:

$$V_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

On développe selon la première ligne et on factorise par ligne :

$$V_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$$

On réitère

$$V_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\prod_{j=3}^{n}(x_j-x_2)\dots\prod_{j=n}^{n}(x_j-x_{n-1})V_1(x_n)$$

avec $V_1(x_n)=1$.
Ainsi

$$V_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

Exercice 77 : [énoncé]
Considérons le polynôme

$$P(X)=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X)=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\dots+\alpha_0$$

avec $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_{n-1}=-(a_1+\dots+a_n)$.
En procédant à l'opération $C_n\leftarrow C_n+\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_kC_{k+1}$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$a_i^n+\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_ka_i^k=P(a_i)-\alpha_{n-1}a_i^{n-1}=-\alpha_{n-1}a_i^{n-1}\text{ car }P(a_i)=0$$

Ainsi

$$\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-2}&a_1^n\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-2}&a_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-2}&a_n^n\end{vmatrix}=-\alpha_{n-1}\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-2}&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-2}&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-2}&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

Exercice 78 : [énoncé]
Considérons le polynôme

$$P(X)=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X)=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\dots+\alpha_0$$

avec $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k=(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1,\dots,a_n$.
En procédant à l'opération $C_n\leftarrow C_n+\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_jC_{j+1}+\sum_{j=n}^{n-1}\alpha_jC_j$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$P(a_i)-\alpha_ka_i^k=-\alpha_ka_i^k\text{ car }P(a_i)=0$$

Ainsi

$$D_k=(-1)^{n+1-k}\sigma_{n-k}\begin{vmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{k-1}&a_1^{k+1}&\cdots&a_1^{n-1}&a_1^k\\1&a_2&\cdots&a_2^{k-1}&a_2^{k+1}&\cdots&a_2^{n-1}&a_2^k\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{k-1}&a_n^{k+1}&\cdots&a_n^{n-1}&a_n^k\end{vmatrix}$$

En permutant de façon circulaire les $n-k$ dernières colonnes, on obtient

$$D_k=\sigma_{n-k}\begin{vmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{k-1}&a_1^k&a_1^{k+1}&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&\cdots&a_2^{k-1}&a_2^k&a_2^{k+1}&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{k-1}&a_n^k&a_n^{k+1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k=\sigma_{n-k}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

Exercice 79 : [énoncé]
En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
Pour $k\in\{1,\dots,n\}$,

$$\Delta(\lambda_k)=(-1)^{k+1}\prod_{i\neq k}(\lambda_k-\lambda_i)V_{n-1}(\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_k,\dots,\lambda_n)=(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

où $V_n(a_1,\dots,a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1,\dots,a_n)$.
Le polynôme Δ coïncide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, ils sont donc égaux.

Exercice 80 : [énoncé]
On a
$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n\\ -C & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AD-BC & B\\ O_n & D\end{pmatrix}$$
et en passant au déterminant, on obtient
$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\det D=\det(AD-BC)\det D$$
On peut alors conclure sachant $\det D\neq 0$.

Exercice 81 : [énoncé]
On a
$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O_n\\ -D^{-1}C & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B\\ O_n & D\end{pmatrix}$$
et en passant au déterminant, on obtient
$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det(A-BD^{-1}C)\det D=\det(AD-BD^{-1}CD)$$

Exercice 82 : [énoncé]
Supposons pour commencer la matrice A inversible.
Par opérations par blocs :
$$\begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0\\ B & D-BA^{-1}C\end{pmatrix}$$
On en déduit
$$\begin{vmatrix} A & C\\ B & D\end{vmatrix}=\det(D-BA^{-1}C)\det A=\det(DA-BA^{-1}CA)$$
Or les matrices A et C commutent donc A^{-1} et C commutent aussi et
$$\begin{vmatrix} A & C\\ B & D\end{vmatrix}=\det(DA-BC)$$
Supposons A non inversible.
Pour p assez grand, la matrice $A_p=A+\frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec C donc
$$\det\begin{pmatrix} A_p & C\\ B & D\end{pmatrix}=\det(DA_p-BC)$$
En passant à la limite quand $p\to+\infty$, la continuité du déterminant donne
$$\det\begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix}=\det(DA-BC)$$

Exercice 83 : [énoncé]
a) En multipliant les n dernières lignes par i et les n dernières colonnes aussi :
$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix}=(-1)^n\det\begin{pmatrix} A & iB\\ -iB & -A\end{pmatrix}$$
puis par opérations sur les lignes
$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix}=(-1)^n\det\begin{pmatrix} A & iB\\ A-iB & -A+iB\end{pmatrix}$$
et par opérations sur les colonnes
$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix}=(-1)^n\det\begin{pmatrix} A+iB & iB\\ 0 & -A+iB\end{pmatrix}$$
On en déduit
$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix}=(-1)^n\det(A+iB)\det(-A+iB)$$
et enfin
$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix}=\det(A+iB)\det(A-iB)$$
Les matrices A et B étant réelles, cette écriture est de la forme $z\bar z=|z|^2\geqslant 0$.
b) $\det(A+iB)\det(A-iB)=\det(A^2+B^2)$ car A et B commutent donc $\det(A^2+B^2)\geqslant 0$.
c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ par exemple.
d) Si A est inversible, on remarque
$$\begin{pmatrix} I & O\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix}$$

donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B+D) = \det(AD-CB)$ car A et C commutent.
On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :
Les applications $A \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD-CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec C. Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec C : si A commute avec C alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A+\lambda I_n$ est inversible et commute avec C). Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

Exercice 84 : [énoncé]
a) Par opération sur les colonnes puis sur les lignes

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$$

b) De façon analogue

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{vmatrix} = |A+iB|^2 \geqslant 0$$

Exercice 85 : [énoncé]
a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} = L_{2n} + L_n$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B+I_n & I_n+B \end{vmatrix}$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n+B \end{vmatrix} = \det(I_n-B)\det(I_n+B)$$

Ainsi A est inversible si, et seulement si, $I_n - B$ et $I_n + B$ le sont (i.e. $1, -1 \notin \mathrm{Sp}B$).
On aurait aussi pu étudier le noyau de A.
b) On peut présumer que l'inverse de A est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M+BN & N+BM \\ BM+N & BN+M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M+BN = I_n \\ BM+N = O_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \left(I_n - B^2\right)^{-1} \\ N = -B\left(I_n-B^2\right)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n-B^2)^{-1} & -B(I_n-B^2)^{-1} \\ -B(I_n-B^2)^{-1} & (I_n-B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

On aurait pu aussi inverser l'équation $AX = Y$

Exercice 86 : [énoncé]
On introduit

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA' & O_{p,n-p} \\ {}^tB' & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & B \\ C^tA' + D^tB' & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^t(\mathrm{com}M) = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & A^tC' + B^tD' \\ C^tA' + D^tB' & C^tC' + D^tD' \end{pmatrix} = (\det M)^n I_p$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} \det(M)I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on obtient

$$\det M \times \det {}^tA' = \det(M)^p \det D$$

puis facilement la relation proposée sachant $\det M \neq 0$.

Exercice 87 : [énoncé]
a) Cas D inversible
Sachant $C^tD = D^tC$, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tD & O_n \\ -{}^tC & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tD - B^tC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant on obtient la relation

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det {}^t D = \det\left(A^t D - B^t C\right)\det D$$

puis la relation voulue sachant $\det D = \det {}^t D \neq 0$
b) Cas D non inversible
Posons $r = \text{rg} C$. On peut écrire $C = PJ_rQ$ avec P, Q inversibles et J_r la matrice (symétrique) dont tous les coefficients sont nuls sauf les r premiers de la diagonale qui sont égaux à 1. Considérons alors $D' = D + \lambda P^t Q^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
On peut écrire

$$D' = P\left(P^{-1}D^tQ + \lambda I_n\right)^t Q^{-1}$$

Si $-\lambda$ n'est pas valeur propre de $P^{-1}D^tQ$, la matrice D' est inversible.
Puisqu'une matrice n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, la matrice D' est assurément inversible quand $\lambda \to 0^+$ avec λ assez petit.
De plus, C^tD' est symétrique car

$$C^tD' - D'^tC = C^tD + \lambda PJ_rQQ^{-1t}P - D^tC - \lambda P^tQ^{-1t}Q^tJ_r^tP = 0$$

Par l'étude qui précède, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D' \end{pmatrix} = \det\left(A^tD' - B^tC\right)$$

et en passant à la limite quand $\lambda \to 0^+$, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(A^tD - B^tC\right)$$

Exercice 88 : [énoncé]
Cas où la matrice A inversible :
Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D)$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice C commute avec les matrices A et B.
On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Cas général :
Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ assez grand, la matrice $A_p = A + 1/pI_n$ est inversible et les matrices A_p, B, C, D commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_pD - BC)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de M équivaut à celle de $AD - BC$.